### 量子散射 分波展开

2016/11/5

散射截面等于一定时间内被散射的粒子数除以单位截面入射的粒子数．那么从经典力学的角度，如果想象入射粒子流密度是均匀的，可以看做是一个障碍物(无远程作用)的最大横截面面积，微分截面可以理解为单位立体角的散射截面．量子力学中，如果考虑单粒子以平面波入射，那么等于被散射的概率流(概率/时间)除以入射的概率流密度(概率/时间/面积)．概率流定义为

 (1)

 (2)  (3)

在球坐标中解定态薛定谔方程，能量和角动量的本征基底为

 (4)

其中径向波函数满足径向方程

 (4\*)

原则上我们只需要把初始波包在这个基底上展开，加上时间因子即可得到时概率的分布．现在我们假设势能没有角分布()，且无穷远处势能为0，则基底化简为

 (5)



 (6)

注意径向函数只能是实数，否则将会有概率流持续流入或流出原点．

然而我们也可以选择能量和无穷远处的线性动量作为本征值(由对称性，令)，求出本征基底，这样如果初始波包有很窄的动量分布(近似为平面波)，我们仅从本征基底的角分布就可求出微分截面而无需分解波包．令该基底为

 (7)

由于在无穷远处，平面波就是定态薛定谔方程的解，所以剩下的项也应该是．且由于散射只有向外的概率流，令

 (8)

其中是为了以下计算方便，球面波的相位包含在中．该基底在无穷远处也可记为

 (9)

其中．注意(9)式在无穷远处是精确成立的．若从波包的角度考虑，入射波包可以看做仅由第一项展开得到，出射波包的部分仅由第二项展开得到，所以可以仅用第一项计算，第二项计算，代入(3)得

 (10)

假设我们已经在球坐标中解出了，即径向波函数与相移，如何获得，即系数呢? 把用基底展开，即对展开，再逐项对比系数即可．首先展开平面波

 (11)

无穷远处

 (12)

将(12)与(8)代入(7)，再逐项与(6)对比，得

 (13)

总结起来，有心力的散射问题只需通过径向方程(4\*)获得，求出和即可．